

Ogólna teoria miary
Lista 3

Zad 1. Wyznaczyć pierścień, σ -pierścień, algebrę oraz σ -algebrę generowaną przez

- a) wszystkie jednoelementowe podzbiory X
- b) wszystkie dwuelementowe podzbiory X
- c) wszystkie podzbiory ustalonego podzbioru $F \subset X$.

Zad 2. Czy istnieje σ -algebra składająca się z n elementów, przy $n = 1, 2, 3, 4, 5$?

Zad 3. Czy istnieje nieskończona σ -algebra przeliczalna?

Zad 4. Udowodnić, że dowolny element pierścienia generowanego przez rodzinę S można pokryć skończoną sumą elementów z S .

Zad 5. Pokazać, że dla dowolnego elementu A σ -pierścienia generowanego przez rodzinę S istnieje przeliczalna podrodzina $T \subset S$ taka, że A jest elementem σ -pierścienia generowanego przez T .

Zad 6. Pokazać, że pierścień generowany przez rodzinę przeliczalną jest przeliczalny.

Zad 7. Niech S będzie dowolną rodziną podzbiorów X . Połóżmy $S_0 = S \cup \{\emptyset, X\}$ i indukcyjnie, dla każdej liczby porządkowej $\alpha > 0$, zdefiniujemy

$$S_\alpha = \left(\bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta \right)^*,$$

gdzie C^* oznacza rodzinę składającą się z przeliczalnych sum różnic dwu zbiorów z C . Wykazać, że jeśli ω_1 jest pierwszą nieprzeliczalną liczbą porządkową, to σ -algebra $\sigma(S)$ generowana przez S wyraża się wzorem

$$\sigma(S) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} S_\alpha.$$

Zad 8. Pokazać, że jeżeli moc rodziny S jest nie większa niż continuum, to również moc σ -algebry $\sigma(S)$ również jest nie większa niż continuum.

Zad 9. Udowodnić, że σ -algebra zbiorów borelowskich przestrzeni topologicznej pokrywa się z σ -algebrą generowaną przez zbiory domknięte.

Zad 10. Pokazać, że na prostej euklidesowej \mathbb{R} następujące zbiory są borelowskie

$$(a, b), [a, b), (a, b], [a, b], \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Zad 11. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele podzbiorów przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n niebędących zbiorami borelowskimi.

Zad 12. Niech $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem ciągłych funkcji rzeczywistych na \mathbb{R} . Wykazać, że następujące zbiory są borelowskie oraz określić ich typ:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \text{granica } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ istnieje}\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \text{ciąg } \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ dąży do liczby wymiernej}\}$$